1 Определение вероятности. Статистическое определение вероятности. Геометрическая вероятность

Определение. *Вероятностью P(A) события в данном опыте называется отношение числа тисходов опыта, благоприятствующих событию A, к общему числу n возможных исходов опыта, образующих полную группу равновероятных попарно несовместных событий:*

$$P(A) = \frac{m}{n} \qquad (7)$$

Это определение вероятности часто называют *классическим*.

Пример. На завод привезли партию из 1000 подшипников. Случайно в эту партию попало 30 подшипников, не удовлетворяющих стандарту. Определить вероятность P(A) того, что взятый наудачу подшипник окажется стандартным.

Решение.Число стандартных подшипников равно $1000-30=970$. Будем считать, что каждый подшипник имеет одинаковую вероятность быть выбранным. Тогда полная группа событий состоит из $n=1000$ равновероятных исходов, из которых событию A благоприятствуют $m=970$ исходов. Поэтому $P(A)=m/n=970/1000=0.97$.

При оценке вероятности событий, основанной на том, насколько ***часто*** будет проявляться данное событие в ***произведённых*** испытаниях, используется статистическое определение вероятности.

Статистической вероятностью события A называется относительная частота (частость) появления этого события в произведённых испытаниях, т.е.:

$$P^*(A) = W(A) = \frac{M}{N}, \qquad (8)$$

где $P^*(A)$ – статистическая вероятность события A;

$W(A)$ – относительная частота (частость) события A;

M – число испытаний, в которых появилось событие A;

N– общее число испытаний.

В отличие от вероятности $P(A)$, рассматриваемой в классическом определении, статистическая вероятность $P^*(A)$ является характеристикой ***опытной, экспериментальной.*** Если $P(A)$ есть доля случаев, благоприятствующих событию A, которая определяется непосредственно, без каких-либо испытаний, то $P^*(A)$ есть доля тех ***фактически произведённых испытаний,*** в которых событие A появилось.

Пример.Наблюдения показывают, что в среднем среди 1000 новорожденных детей 515 мальчиков. Какова частота рождения мальчиков?

Решение.Пусть событие A – «рождение мальчика». Общее число испытаний в данной задаче n=1000, число m появлений события A равно 515. Частота появления события А: $P^*(A)=\frac{m}{n}=\frac{515}{1000}=0{,}515$

Геометрическая вероятность

Пусть на плоскости имеется некоторая область D, площадь которой S_D, и в ней содержится другая область d, площадь которой S_d (рисунок 1). В область Dнаудачу бросается точка.

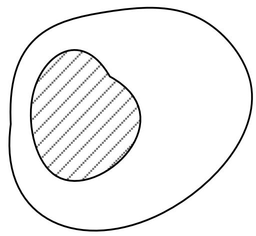


Рисунок 1

При этом предполагается, что наудачу брошенная точка может попасть в любую точку области и вероятность попадания в какую-либо часть области Dне зависит от её расположения и формы.

Это значит, что пространство Ω содержит несчетное множество равновозможных элементарных событий ω и область D является геометрическим образом пространства Ω. Тогда $P(A)=\frac{S_d}{S_D}$ равна отношению площади области d, занятой благоприятствующими положениями точки попадания к площади области D.

Геометрической вероятностью события А называется отношение меры области (длины, площади, объёма) благоприятствующей появлению события A, к мере всей области, т.е.

$$P(A)=\frac{mes\ d}{mes\ D}, \qquad (9)$$

где mes – мера (длина, площадь, объём).

Задачи для самостоятельного решения

1. Бросают 2 игральные кости. Какова вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях равна 5?
2. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 кубиков одинакового размера. Полученные кубики тщательно перемешены. Какова вероятность того, что кубик, извлеченный наудачу, будет иметь 2 окрашенные стороны.
3. Из 60 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент подготовил 50. Какова вероятность того, что вытянутый студентом билет, содержащий 2 теоретических вопроса, будет состоять из подготовленных им вопросов?
4. Английский математик Карл Пирсон (1857-1936) бросал монету 24000 раз, причем герб выпал 12012 раз. Какова частота появления герба в данной серии испытаний?
5. Отдел технического контроля обнаружил пять бракованных книг в

партии из случайно отобранных 100 книг. Найти относительную частоту появления бракованных книг.

6. При испытании партии приборов относительная частота годных приборов оказалась равной 0,9. Найти число годных приборов, если всего было проверено 200 приборов.

7. В магазине проведен учет спроса костюмов:

Размер	44	46	48	50	52	54
Спрос	90	148	532	585	455	183

Определить частость спроса в % 48 размера.

8. Некоторая фирма в течение времени провела опрос 1000 покупателей нового сорта напитка и 20 из них оценили его как вкусный. Оценить вероятность того, что потребителям понравится новый напиток.

9. На территории предприятия произошла авария водопровода. Общая длина водопроводаL=150 м. В том числе 50 м трубы приходятся на труднодоступные места. Какова вероятность того, что ремонт придется производить именно на труднодоступном участке?

10. На плоскости начерчены две концентрические окружности, радиусы которых 5 и 10 см соответственно. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг, попадет также и в кольцо, образованное построенными окружностями. Предполагается, что вероятность попадания точки в плоскую фигуру пропорциональна площади этой фигуры и не зависит от ее расположения.

11. В круг радиуса R помещен меньший круг радиуса r. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в большой круг, попадет также и в малый круг. Предполагается, что вероятность попадания точки в круг пропорциональна площади круга и не зависит от его расположения.

2 Условная вероятность. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Событием, *противоположным* событию A, называется событие$\bar{A}$, состоящее в ненаступлении события А.

Теорема 1. *Для любого события* А*вероятность противоположного события* $\bar{A}$*выражается равенством*

$$P(\bar{A})=1- P(A)$$

Теорема 2. *Вероятность невозможного события равна нулю.*

Как отмечено выше, вероятность $P(B)$ как мера степени объективной возможности наступления события B имеет смысл при выполнении определенного комплекса условий. При изменении условий вероятность события B может измениться.

Определение 1. Вероятность события B, вычисленная при условии, что произошло некоторое событие A, называется ***условной вероятностью*** события B и обозначается $P_A(B)$

Пример. Для некоторой местности среднее число дождливых дней в августе равно 15. Какова вероятность того, что 2-го августа будет дождь?

$n=31$

$\underline{m_д=15}$

	I	II
	$A-1.08$ - дождь	$A-1.08$ - ясно
	B - 2.08 - дождь	B- 2.08 - дождь
	$\mathrm{n}=30 \quad \mathrm{m}_д=14$	$\mathrm{n}=30 \;;\; \mathrm{m}_д=15$
	$P_A(B)=\dfrac{14}{30}$	$P_A(B)=\dfrac{15}{30}=\dfrac{1}{2}$

Теорема умножения двух зависимых событий

Теорема 3. Вероятность совместного наступления двух зависимых событийA и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, в предположении, что первое событие уже произошло.

$$\boxed{P(A\cdot B)=P(A)\cdot P_A(B)} \qquad (10)$$

<u>*Следствие 1.*</u>Теорема (3) легко обобщается на случай произвольного числасобытий

$$P(A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1A_2}(A_3)\cdot\ldots\cdot P_{A_1\ldots A_{n-1}}(A_n)$$

При этом вероятность каждого последующего события вычисляется впредположении, что все предыдущие события произошли.

<u>*Следствие 2.*</u>Для любого из событий A и B справедливо равенство:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P_A(B)=P(B)\cdot P_B(A),$$

т.е. теорема (3) обладает коммутативностью умножения $A\cdot B=B\cdot A$

Пример. См. условие предыдущей задачи.Какова вероятность того, что 1, 2, 3 августа будут дождливы?

A – 1.08. – дождь

B – 2.08. – дождь

C – 3.08. – дождь

$$P(A\cdot B\cdot C)=P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{A\cdot B}(C)$$

$$P(A)=\frac{15}{31}\quad;\quad P_A(B)=\frac{14}{30}\quad;\quad P_{A\cdot B}(C)=\frac{13}{29}$$

$$P(A\cdot B\cdot C)=\frac{\cancel{15}}{31}\cdot\frac{\overset{7}{\cancel{14}}}{\underset{8}{\cancel{30}}}\cdot\frac{13}{29}=\frac{91}{899}=0{,}1$$

Теорема умножения для независимых событий

Определение 2. Два события называются ***независимыми***, если появления одного из них не меняет вероятности наступления другого.

Пусть события A и B – независимы, тогда $P_A(B)=P(B)$

Теорема 4. Вероятность совместного наступления двух независимых событийA и B равна произведению вероятностей этих событий.

$$\boxed{P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)}\qquad(11)$$

_Следствие._Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностейэтих событий.

$$P(A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)\cdot\ldots\cdot P(A_n)$$

Пример. Имеется 3 ящика, содержащих по 10 деталей. В первом ящике 8, во втором 7 и в третьем 9 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу выбирают по одной детали. Какова вероятность того, что все три вынутые детали окажутся нестандартными?

A- нестандартная деталь из 1-го ящика

B- -‖- -‖- -‖- 2-го ящика | независимые

C- -‖- -‖- -‖- 3-го ящика

$$P(A)=\frac{2}{10}\quad;\quad P(B)=\frac{3}{10}\quad;\quad P(C)=\frac{1}{10}$$

$$P(A\cdot B\cdot C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)=0{,}2\cdot 0{,}3\cdot 0{,}1=0{,}006$$

Теорема сложения вероятностей несовместных событий

Теорема 5. Вероятность наступления хотя бы одного из двух несовместных событий A или B равна сумме вероятностей этих событий.

$$\boxed{P(A+B)=P(A)+P(B)}\qquad(12)$$

Пример. В денежно-вещевой лотерее на каждые 10000 билетов разыгрывается 150 вещевых и 50 денежных выигрышей. Чему равна вероятность выигрыша?

$$\begin{array}{c|l} n=10000 & C - \text{выигрыш} \\ m_в=150 & A - \text{вещевой выигрыш} \\ m_д=50 & B - \text{денежный выигрыш} \quad \Big|\ \text{несовместные} \\ \hline P(C)-? & C=A+B \text{ (или вещевой, или денежный)} \\ & P(C)=P(A+B)=P(A)+P(B)=\dfrac{150}{10000}+\dfrac{50}{10000}=\dfrac{200}{10000}=0{,}02 \end{array}$$

<u>*Следствие 1.*</u> Данная теорема справедлива для «***n***» несовместных событий.

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$$

<u>*Следствие 2.*</u> Сумма вероятностей событий, образующих полную систему, равна 1.

$$\boxed{P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_к)=1}$$

<u>*Следствие 3*</u>. Сумма вероятностей противоположных событий равна 1.

$$\boxed{P(A)+P(\overline{A})=1},$$

где A – данное событие, $\overline{A}$ – противоположное событие.

Данное утверждение следует из того, что противоположные события образуют полную систему событий. Принято обозначать $P(A)=p;\ P(\overline{A})=q$. Следовательно $\boxed{p+q=1}$.

Пример. Если вероятность попадания в цель p=0,8, то вероятность промаха q= 0,2.

Теорема сложения для совместных событий.

Теорема 6. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления.

$$\boxed{P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)} \qquad (13)$$

В случае 3-х и более совместных событий формула будет очень громоздка. Так, для 3-х событий:

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

Поэтому проще перейти к противоположному событию и использоватьформулу:

$$P(A_1+A_2+...+A_к)=1-P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot ...\cdot P(\overline{A_к}) \text{ или } \boxed{P(A)=1-q_1\cdot q_2\cdot q_3 .....}.$$

Определение 3.Вероятность появления **хотя бы одного** из событий $A_1, A_2 ... A_к$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\overline{A_1}$; $\overline{A_2}$ ... $\overline{A_к}$.

Частный случай. Если события $A_1, A_2 ... A_к$ имеют одинаковую вероятность, равную «**р**», то вероятность появления хотя бы одного из этих событий равна: $P(A) = 1 - q^k$

Пример. В типографии имеется 4 плоскопечатные машины. Для каждой машины вероятность того, что она работает в данный момент равна 0,9. Какова вероятность того, что в данный момент работает хотя бы одна машина (событие A).

$$p = 0,9$$
$$q = 1 - 0,9 = 0,1$$
$$P(A) - ?$$

$$P(A) = 1 - q^4 = 1 - (0,1)^4 = 1 - 0,0001 = 0,9999$$

*Замечание.*При использовании формулы (13) следует иметь в виду, что события A и B могут быть как независимыми, так и зависимыми.

Для независимых событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

Для зависимых событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P_A(B)$$

Пример 1.Устройство содержит два независимо работающих элемента.Вероятность отказа1-го из них – 0,05; 2-го-0,08. Какова вероятность того,что откажет все устройство, если для этого достаточно, чтобыотказал хотя бы один элемент?

$$P_1 = P(A_1) = 0,05$$
$$P_2 = P(A_2) = 0,08$$
$$P(A_1 + A_2) - ?$$
$$q_1 = 0,95$$
$$q_2 = 0,92$$

A_1 *и* A_2 – совместные события, независимые

1) $P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) \cdot P(A_2) = 0,05 + 0,08 - 0,05 \cdot 0,08 =$
$= 0,13 - 0,004 = 0,126$

2) $P(A_1 + A_2) = 1 - q_1 \cdot q_2 = 1 - 0,95 \cdot 0,92 = 1 - 0,874 = 0,126$

Пример 2.На 100 лотерейных билетов приходится 5 выигрышных. Какова вероятность выигрыша хотя бы по одному билету, если приобретено 2.

$$\begin{array}{l|l}
 & \left.\begin{array}{l} A_1 - \text{выиграл 1-й билет} \\ A_2 - \ - \ \| - \ \ 2 - \text{й билет} \end{array}\right| \text{совместные, зависимые} \\
n=100 & \\
\underline{m=2} & P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)=\frac{5}{100}+\frac{5}{100}-\frac{5}{100}\cdot\frac{4}{99}=0{,}098 \\
 & \Rightarrow \text{оба : 2 – ой билет выиграет, если выиграл 1-й}
\end{array}$$

Вероятность появления только одного события

Пусть вероятности появления каждого из двух независимых событий A_1 и A_2 соответственно равны p_1 и p_2. Найдем вероятность появления только одного из этих событий.Введем обозначения событий:

B_1 – появилось только событие A_1;

B_2 – появилось только событие A_2.

Появление события B_1 равносильно появлению события $A_1 \cdot \overline{A_2}$ (появилось первое событие и не появилось второе), т.е. $B_1 = A_1 \cdot \overline{A_2}$

Появление события B_2 равносильно появлению события $\overline{A_1} \cdot A_2$ (появилось второесобытие и не появилось первое), т.е. $B_2 = \overline{A_1} \cdot A_2$

Таким образом, чтобы найти вероятность появления только одного из событий A_1 и A_2, достаточно найти вероятность появления одного, безразлично какого, из событий B_1 и B_2. События B_1 и B_2 несовместны, поэтому применима теорема сложения:

$$P(B_1+B_2)=P(B_1)+P(B_2) \qquad (*)$$

Найдем вероятности каждого из событий B_1 и B_2. События A_1 и A_2 независимы, следовательно, независимы события A_1 и $\overline{A_2}$, а также $\overline{A_1}$ и A_2, поэтому применима теорема умножения:

$$P(B_1)=P(A_1\cdot\overline{A_2})=P(A_1)\cdot P(\overline{A_2})=p_1\cdot q_2$$

$$P(B_2)=P(\overline{A_1}\cdot A_2)=P(\overline{A_1})\cdot P(A_2)=q_1\cdot p_2$$

Подставим эти вероятности в соотношение (*) и найдем искомую **вероятность появления только одного из событий** A_1 и A_2:

$$\boxed{P(B_1+B_2)=p_1\cdot q_2+q_1\cdot p_2}$$

Пример. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания вмишень при одном выстреле для 1-го стрелка = 0,7, для 2-го = 0,8. Какова вероятность того, что при одном залпе в мишень попадет только один стрелок.

$p_1 = 0,7$
$p_2 = 0,8$
$q_1 = 0,3$
$q_2 = 0,2$
$P(B_1 + B_2) - ?$
$P(B_1 + B_2) = p_1 \cdot q_2 + q_1 \cdot p_2 = 0,7 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,8 = 0,14 + 0,24 = 0,38$

Задачи для самостоятельного решения

1. Из участников танцевального кружка, состоящего из 8 девушек и 4 юношей, выбирают 9 человек для определенного танца. Найти вероятность того, что среди участников окажутся все юноши?
2. В урне 8 красных и 6 голубых шаров. Из урны последовательно без возвращения извлекается 3 шара. Найти вероятность, что все 3 шара голубые.
3. Бросаются две игральные кости. Какова вероятность появления хотя бы одной шестерки?
4. Вероятность того, что приобретенный товар произведен в Италии, равна 0,4, а того, что он произведен в Турции – 0,3. Какова вероятность того, что товар произведен в одной из этих стран?
5. Рабочий обслуживает три станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего, для первого станка равна 0,9, для второго – 0,8, для третьего – 0,7. Найти: 1) вероятность того, что в течение часа ни один из трех станков не потребует внимания рабочего; 2) вероятность того, что в течение часа по крайней мере один из станков не потребует внимания рабочего.
6. Вероятность летной погоды равна 0,9, а вероятность того, что при условии летной погоды груз будет доставлен своевременно – 0,8. Какова вероятность того, что груз будет доставлен своевременно?
7. Исследователь разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятность того, что формула окажется в первом справочнике, равна 0,6, во втором – 0,7, в третьем – 0,8. Какова вероятность того, что формула окажется:

а) только в одном справочнике;

б) только в двух справочниках;

в) во всех трех справочниках;

г) хотя бы в одном справочнике;

д) ни в одном справочнике;

е) хотя бы в двух справочниках;

ж) только в первом справочнике;

з) только во втором справочнике;

и) не менее чем в двух энциклопедиях.

8. В партии из 50 деталей имеется 10 бракованных. Какова вероятность того, что среди наудачу отобранных 20 деталей окажется 3 бракованных?

9. Прокуратура проверяет деятельность одного частного предпринимателя, который владеет тремя магазинами. Проверка проводится одним проверяющим в одном произвольно выбранном магазине. Вероятность выявить нарушения в первом магазине равна 0,1, во втором – 0,3, в третьем – 0,25. Какова вероятность того, что нарушения будут выявлены:

а) только в одном магазине; б) только в двух магазинах; в) во всех трех магазинах; г) хотя бы в одном магазине; д) ни в одном магазине; е) хотя бы в двух магазинах; ж) только в первом магазине; з) только во втором магазине; и) не менее чем в двух магазинах.

3 Формула полной вероятности

Пусть событие A может произойти только вместе с одним из попарно несовместных событий $H_1, H_2, ..., H_n$, образующих полную группу. Тогда, если произошло событие A, то это значит, что произошло одно из попарно несовместных событий $H_1A, H_2A, ..., H_nA$. Следовательно,

$$P(A)= P(H_1)\cdot P_{H_1}(A) + P(H_2)\cdot P_{H_2}(A) + ... + P(H_n)\cdot P_{H_n}(A) \quad (14)$$

Эта формула называется ***формулой полной вероятности***. События H_1, $H_2, ..., H_n$ часто называют «гипотезами».

Пример. В магазин поступили электрические лампочки одного типа, изготовленные на четырех ламповых заводах: с 1-го завода 250 шт., со 2-го – 525 шт., с 3-го – 275 шт. и с 4-го – 950 шт. Вероятность того, что лампочка прогорит более 1500 часов, для 1-го завода равна 0,15, для 2-го – 0,30, для 3-го – 0,20, для 4-го – 0,10. При раскладке по полкам магазина лампочки были перемешаны. Какова вероятность того, что купленная лампочка прогорит более 1500 часов?

Решение. Пусть A – событие, состоящее в том, что лампочка прогорит более 1500 часов, а H_1, H_2, H_3 и H_4– гипотезы, что она изготовлена соответственно 1, 2, 3 или 4-м заводом. Так как всего лампочек 2000 шт., то вероятности гипотез соответственно равны:

$$P(H_1)=\frac{250}{2000}=0,125;\ P(H_2)=\frac{525}{2000}=0,2625;\ P(H_3)=\frac{275}{2000}=0,1375$$

$$P(H_4)=\frac{950}{2000}=0,475.$$

Далее, из условия задачи следует, что:

$P_{H_1}(A) = 0,15$; $P_{H_2}(A) = 0,3$;$P_{H_3}(A) = 0,2$; $P_{H_4}(A) = 0,1$.

Используя формулу полной вероятности (14), получаем:

$$P(A) = 0,125\cdot 0,15 + 0,2625\cdot 0,3 + 0,1375\cdot 0,2 + 0,475\cdot 0,1 = 0,1725$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Детали для обработки поступают из двух заготовительных цехов: из первого цеха – 70%, из второго – 30%, причем продукция первого цеха имеет 10% брака, а продукция второго цеха – 20% брака. Какова вероятность того, что случайно взятая деталь будет без дефектов?

2. Экономист полагает, что вероятность роста стоимости акций некоторой компании в следующем году будет равна 0,75, если экономика страны будет на подъеме; и эта же вероятность будет равна 0,3, если экономика страны не будет успешно развиваться. Вероятность экономического подъема в новом году равна 0,8. Оценить вероятность того, что акции компании поднимутся в цене в следующем году.

3. В университетской лаборатории имеется 6 вычислительных автоматов и 4 полуавтомата. Вероятность того, что за время выполнения

некоторого расчета автомат не выйдет из строя равна 0,95, для полуавтомата – 0,8. Лаборант производит расчет на наудачу взятой машине. Найти вероятность того, что до окончания расчета машина не выйдет из строя.

4 Формула Байеса

Формула Байеса имеет вид:

$$P\left(H_i / A\right)=\frac{P\left(H_i\right)\cdot P\left(A/H_i\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P\left(H_i\right)\cdot P\left(A/H_i\right)} \qquad (15)$$

Пример 1. На склад поступило 1000 подшипников. Из них 200 изготовлены на 1-м заводе, 460 – на 2-м и 340 – на 3-м. Вероятность того, что подшипник окажется нестандартным, для 1-го завода равна 0,03, для 2-го – 0,02, для 3-го – 0,01. Взятый наудачу подшипник оказался нестандартным. Какова вероятность того, что он изготовлен 1-м заводом?

Решение. Пусть *A* – событие, состоящее в том, что взятый Подшипник нестандартный, а H_1, H_2, H_3 – гипотезы, что он изготовлен соответственно 1-м, 2-м или 3-м заводом. Вероятности указанных гипотез составляют:

$$P(H_1)=\frac{200}{1000}=0{,}2; \qquad P(H_2)=\frac{460}{1000}=0{,}46; \; P(H_3)=\frac{340}{1000}=0{,}34$$

Из условия задачи следует, что:

$p_1 = P_{H_1}(A) = 0{,}03$; $p_2 = P_{H_2}(A) = 0{,}02$; $p_3 = P_{H_3}(A) = 0{,}01$.

Найдем $P_A(H_1)$, т.е. вероятность того, что подшипник, оказавшийся нестандартным, изготовлен 1-м заводом. По формуле Байеса получаем:

$$P_A(H_1)=\frac{P(H_1)p_1}{P(H_1)p_1+P(H_2)p_2+P(H_3)p_3}=\frac{0{,}2\cdot 0{,}03}{0{,}2\cdot 0{,}03+0{,}46\cdot 0{,}02+0{,}34\cdot 0{,}01}\approx 0{,}322$$

Таким образом, вероятность гипотезы, что подшипник изготовлен 1-м заводом, изменилась после того, как стало известно, что он нестандартен.

Задачи для самостоятельного решения

1. У рыбака имеется 3 излюбленных места для ловли рыбы, которые он посещает с равной вероятностью каждое. Если он закидывает удочку на первом месте, рыба клюет с вероятностью 0,5; на втором – 0,7; на третьем – 0,6. Известно, что рыбак, выйдя на ловлю рыбы, три раза закинул удочку, и рыба клюнула только один раз. Найти вероятность того, что он удил рыбу на первом месте.

2. В специализированную больницу поступают в среднем 50% больных с заболеванием Н, 35% – с заболеванием Х, 15% – с заболеванием Z. Вероятность полного излечения болезни Н равна 0,7; для болезней Х и Z вероятности излечения соответственно равны 0,8 и 0,9. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Найти вероятность того, что он страдал заболеванием Н.

3. Из числа авиалиний аэропорта 60 % - местные, 30 % - по СНГ, 10 % - международные. Среди пассажиров местных авиалиний 50 % бизнесменов, на линиях СНГ таких пассажиров 60 %, на международных - 90 %. Чему равна вероятность, что случайно выбранный пассажир: а) бизнесмен, б)

прибыл из стран СНГ, в) прибыл местным рейсом, г) прибыл международным рейсом?

5 Последовательные испытания. Формула Бернулли

Всякую комбинацию, в которую A входит m раз и $\bar{A}$входит n-m раз, назовем благоприятной. Количество благоприятных комбинаций равно количеству k способов, которыми можно выбрать m чисел из данных n. Таким образом, оно равно числу сочетаний из n элементов по m, т.е. $k = C_n^m$

Все благоприятные комбинации являются, очевидно, несовместными. Поэтому (на основании аксиомы сложения вероятностей): $P_n(m) = P(B_1) + P(B_2) + ... + P(B_i) = C_n^m p^m q^{n-m}$

Следовательно,

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} \quad \text{– } \textit{формула Бернулли} \quad (16)$$

Пример 1. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,6. Какова вероятность того, что 8 выстрелов дадут 5 попаданий?

Решение. Здесь n=8; m=5;p=0,6;q=1-0,6=0,4.

Используя формулу (16), имеем $P_8(5) = \frac{8!}{5!(8-5)!}(0{,}6)^5(0{,}4)^3 \approx 0{,}28$

Частонеобходимо знать, при каком значении m вероятность принимает наибольшее значение, т.е. требуется найти *наивероятнейшее число* μ*наступления события* A в данной серии опытов. Можно доказать, что число μдолжно удовлетворять двойному неравенству:

$$np–q \le \mu \le np+p$$

Заметим, что сегмент [np-q;np+p], в котором лежитμ, имеет длину (np+p)-(np-q)=p+q=1. Поэтому, если какой-либо из его концов не является целым числом, то между этими концами лежит единственное целое число, и μопределено однозначно. В том случае, если оба конца – целые числа, имеются два наивероятнейших значения: np-q и np+p.

Пример 2. Орудие выпустило 36 снарядов с вероятностью попадания равна 0,85. Найти наивероятнейшее число попаданий в цель.

Решение. $36\cdot0{,}85-0{,}15 \le\mu\le 36\cdot0{,}85+0{,}85$

$30{,}45 \le\mu\le 31{,}55$, следовательно, μ=31

Задачи для самостоятельного решения

1. Производство дает 60% продукции первого сорта. Какова вероятность того, что из 6 изделий окажется: а) 4 изделия первого сорта; б) не менее 4 изделий первого сорта.
2. В городе 10 коммерческих банков. У каждого риск банкротства в течении года составляет 10 %. Чему равна вероятность того, что в течении года обанкротится не больше одного банка?
3. При каком числе выстрелов наивероятнейшее число попаданий равно 16, если вероятность промаха в отдельном выстреле равна 0,3.

4. Доля изделий высшего сорта на данном предприятии составляет 31%. Чему равно наивероятнейшее число изделий высшего сорта в случайно отобранной партии из 75 изделий?

6 Вероятность редких событий. Формула Пуассона

Формула Пуассона выводится из формулы Бернулли и после ряда преобразований выглядит следующим образом:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \qquad (17)$$

где $\lambda = np$ и k – количество раз, которое произойдет редкое событие.

Все значения сведены в таблицу и представлены в приложении 1.

Пример. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение некоторого времени t равна 0,002. Найти вероятность того, что за это время откажут ровно 3 элемента.

Решение. $\lambda = np = 1000 \cdot 0{,}002 = 2,\ P_{1000}(3) = 0{,}18$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Среди семян пшеницы высшего сорта 0,04% сорняков. Какова вероятность того, что среди случайно отобранных 5000 семян обнаружиться 5 семян сорняков?

2. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,001. Какова вероятность того, что при 1000 выстрелов будет не более двух попаданий?

3. На предприятии 1000 единиц оборудования определенного вида. Вероятность отказа единицы оборудования в течение часа составляет 0,001. Чему равна вероятность того, что в течение часа откажут как минимум две единицы оборудования?

Локальная теорема де Муавра-Лапласа

Теорема. Если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то вероятность $P_n(m)$появления события A в n испытаниях равно m раз приближенно равна значению функции:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \qquad (18)$$

В связи с трудностями вычисления по формуле (18) созданы специальные таблицы, представленные в приложении 2.

На практике применяют локальную теорему в виде:

$$P_n(m) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}},\ \text{где}\ x = \frac{|m - np|}{\sqrt{npq}}$$

Пример 1. Найти вероятность того, что 80из 1000 покупателей приобретут мужскую обувь, если вероятность покупки обуви p=0,11 (по данным из наблюдений за предыдущий период).

Решение.p=0,11 q=1–0,11=0,89   n=1000   m=80

$$x=\frac{|\ 80-1000\cdot 0{,}11\ |}{\sqrt{1000\cdot 0{,}11\cdot 0{,}89}}=\frac{|-30|}{\sqrt{97{,}9}}=\frac{30}{9{,}9}=3{,}03$$

$$P_{1000}(80)\approx\frac{\varphi(3{,}03)}{\sqrt{97{,}9}}\approx\frac{0{,}0040}{9{,}9}\approx 0{,}0004$$

Поскольку функция $\varphi(x)$четная, то $\varphi(x)=\varphi(-x)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Вероятность того, что элемент прибора не выйдет из строя, равна 0,8. Какова вероятность того, что из 600 элементов прибора за время его работы не выйдет из строя 450 элементов?
2. На каждые 100 посеянных зерен всходит в среднем 85. Какова вероятность того, что из 1000 посеянных зерен взойдет 840?
3. В банк поступило 100 авизо. Подозревают, что среди них 20 фальшивых. Тщательной проверке подвергается 60 случайно отобранных авизо. Чему равна вероятность, что в ходе проверки обнаружится 10 фальшивых?

7 Интегральная формула Лапласа

Если вероятность p появления событий А в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то:

$$P_n(a \le k \le b) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \text{ ,где } x_1 = \frac{a - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{b - np}{\sqrt{npq}} \quad (19)$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt -$$ функция Лапласа.

Функция $\Phi(x)$ является нечетной, поэтому $\Phi(-x)=-\Phi(x)$. При значениях $x>5$ считается $\Phi(x)\approx 0,5$.

Значения функции даны в приложении 3.

На практике интегральная теорема Лапласа применяется в виде:

$$P_n(a < k < b) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$$

Пример. Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна p=0,85. Найти вероятность того, что событие появится не менее 70 раз и не более 95 раз.

Решение. p=0,85 q=1-0,85=0,15 n=100 a=70 b=95

$$x_1 = \frac{70 - 100 \cdot 0,85}{\sqrt{100 \cdot 0,85 \cdot 0,15}} = \frac{70 - 85}{\sqrt{12,75}} = -\frac{15}{3,75} = -4$$

$$x_2 = \frac{95 - 100 \cdot 0,85}{\sqrt{100 \cdot 0,85 \cdot 0,15}} = \frac{95 - 85}{\sqrt{12,75}} = -\frac{10}{3,75} = 2,66$$

$P_{100}(70 \le k \le 95) \approx \Phi(2,66) - \Phi(-4) \approx 0,4961+0,499968=0,996068$

Задачи для самостоятельного решения

1. Производство дает 40% продукции первого сорта. Какова вероятность того, что из 600 первосортных изделий окажется от 228 до 252?

2. В инкубаторе вероятность вывода петушка равна 0,5. Определить вероятность того, что из 10000 выведенных цыплят число петушков будет от 4950 до 5150?

3. Фирма выпускает 75 % продукции первого сорта. Какова вероятность того, что из 300 изделий не менее 280 будут первосортными.

8 Понятие случайной величины и закон их распределения

Случайной величиной(далее будем обозначать СВ) называют числовую величину, значение которой зависит от того, какой именно элементарный исход произошел в результате опыта со случайным исходом. Множество всех значений, которые случайная величина может принимать, называют ***множеством значений*** этой случайной величины.

Законом распределения случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями. Закон можно задать аналитически, таблично, графически.

Простейшей формой задания закона распределения дискретной случайной величиной Х (*ДСВ X)* является ряд распределения.

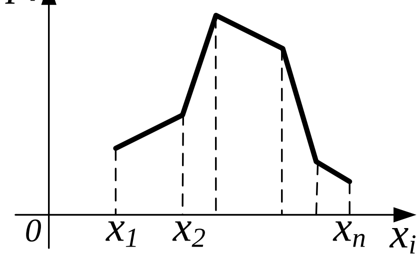
Рядом распределения вероятностей *ДСВ X* называют таблицу, в которой перечислены все возможные значения случайной величины и соответствующие им вероятности $p_i = P\left(X = x_i\right)$ того, что случайная величина примет эти значения.

x_i	x_1	x_2	…	p_n
p_i	$p_1 = P\left(X = x_1\right)$	$p_2 = P\left(X = x_2\right)$	…	$p_n = P\left(X = x_n\right)$

Так как события $X_1,\ldots,X_n$ несовместны, потому что *СВ* может принять в результате опыта только одно значение, и образуют полную группу событий, то:

$$\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Для наглядности ряд распределения представляют графически. Для этого все возможные значения случайной величины откладывают по оси *0x*, а по оси *0y* – соответствующие вероятности. Вершины полученных ординат обычно соединяют отрезками прямых.



Такая фигура называется ***многоугольником распределения.***

Формы закона распределения

а) Функция распределения и её свойства

Функцией распределения *СВ X* называется функция *F(x),* выражающая для каждого *x* вероятность того, что *СВ X* примет значение меньше *x:*

$$F(x)=P(X<x).$$

Функцию *F(x)* иногда называют интегральной функцией распределения или интегральным законом распределения.

Для *ДСВ X*, которая может принимать значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, функция распределения будет иметь вид:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i)$$

где символ $x_i < x$ под знаком суммы обозначает, что суммирование распространяется на все те возможные значения СВ, которые по своей величине меньше аргумента *x*.

Основные свойства функции распределения

Свойство 1. $0 \le F(x) \le 1$.

Свойство 2. Если $\beta \ge \alpha$, то $F(\beta) \ge F(\alpha)$.

Свойство 3. $p(\alpha \le x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.

Свойство 4. $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0;\ F(\infty) = \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1;$

$F(-\infty) = P(X < -\infty) = 0;\ F(\infty) = P(X < \infty) = 1.$

б) Плотность вероятности и её свойства

Предел отношения вероятности попадания *СВ X* на интервал, содержащий точку *x*, к длине этого интервала, когда $\Delta x \to 0$, называется плотностью распределения вероятности *СВ* в точке *x* и обозначается *f(x)*.

$$f(x) = F'(x).$$

Вероятность попадания *СВ X* на (α, β)равна интегралу:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \cdot$$

Функция распределения *F(x)*, выраженная через плотность распределения *f(x)*,имеет вид $F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx.$

Основные свойства плотности вероятности

1. $f(x) \ge 0$.
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

Если интервал возможных значений *СВ* имеет конечные пределы *(a, в),* то $f(x) = 0$ вне интервала $\int\limits_{a}^{в} f(x)dx = 1.$

9 Числовые характеристики случайных величин

а) Математическое ожидание случайной величины

Математическим ожиданием (МОЖ) ДСВ X называется сумма парных произведений возможных значений СВ на вероятности этих значений:

$$M\left(X\right)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i . \qquad (20)$$

Для непрерывной случайной величины(НСВ):

$$M\left(X\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f\left(x\right)dx,$$

где *f(x)*– плотность вероятности.

Простейшие свойства математического ожидания

1) $M(C)=C$.
2) $M(CX)=CM(X)$.
3) $M(X_1+\ldots+X_п) = M(X_1) +\ldots+ M(X_п)$
$M(X_1-\ldots-X_п) = M(X_1) -\ldots-M(X_п)$

б) Дисперсия и среднее квадратическое отклонение случайной величины

Характеристики, показывающие, насколько тесно сгруппированы возможные значения случайной величины около центра рассеивания (МОЖ), называются ***характеристиками рассеивания.***

Такими характеристиками являются дисперсия и среднее квадратическое отклонение.

Дисперсией СВ называется математическое ожидание квадрата ее отклонения, обозначается:

$$D(X)=M(X - a)^2$$

Из определения следует, что дисперсия *СВ X* вычисляется по формуле:

$$D(X)=M(X^2) - (M(X))^2 \qquad (21)$$

Дисперсия *СВ* обладает следующими свойствами:
1) $D(C) = 0$;
2) $D(CX) = C^2D(X)$.
3) $D(X_1+\ldots+X_п) = D(X_1) +\ldots+ D(X_п)$
$D(X_1-\ldots-X_п) = D(X_1) +\ldots+ D(X_п)$

Дисперсия *СВ* является удобной характеристикой рассеивания возможных значений *СВ*, однако лишена наглядности, т.к. имеет размерность квадрата *СВ*.

Поэтому для характеристики отклонений *СВ X*, имеющей размерность, одинаковую с размерностью *СВ*, вводится понятие стандарта.

Средним квадратическим отклонением (СКО)*СВ X* называется арифметический корень из дисперсии, обозначается:

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)}.$$

Решение типовых примеров

Пример 1. Ряд распределения СВ X – «Числа попаданий» имеет вид:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,24	0,46	0,26	0,04

Найти функцию распределения.

Решение.

При:

1) $x \le 0 \quad F(x) = P(X < 0) = 0$.

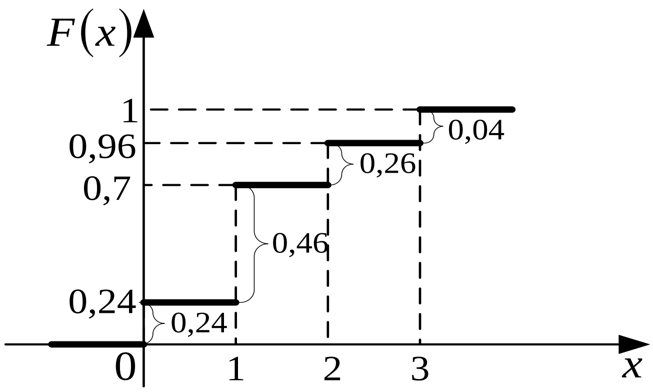
2) $0 < x \le 1 \quad F(x) = P(X < 1) = P(X = 0) = 0,24$.

3) $1 < x \le 2 \quad F(x) = P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,24 + 0,46 = 0,7$.

4) $2 < x \le 3 \quad F(x) = P(X < 3) = P(X < 2) + P(X = 2) = 0,7 + 0,26 = 0,96$.

5) $x > 3 \quad F(x) = P(X < 3) + P(X = 3) = 0,96 + 0,04 = 1$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 0,24, & 0 < x \le 1; \\ 0,7, & 1 < x \le 2; \\ 0,96, & 2 < x \le 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$



Пример 2. Функция распределения непрерывной случайной величины задана выражением:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \le 1 \\ a(x-1)^2, & \text{при} \quad 1 < x \le 3 \\ 1, & \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$$

Найти:

1. коэффициент a;
2. $P\left(1 \le X < 2\right)$;
3. построить график функции *F(x)*.

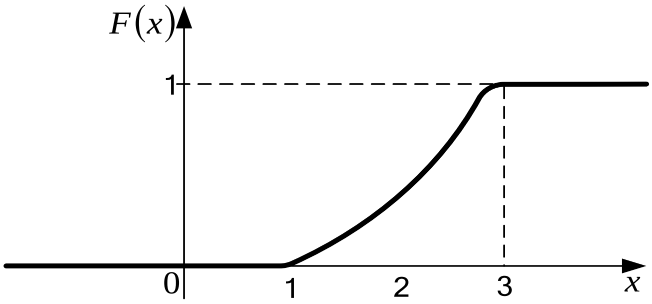
Решение.

1) Так как функция распределения непрерывной *СВ X* непрерывна, то при x = 3 имеем:

$a(3-1)^2 = 1;\ a = \frac{1}{4};$

2) $P\left(1 \le X < 2\right) = F\left(2\right) - F\left(1\right) = \frac{1}{4}(2-1)^2 - \frac{1}{4}(1-1)^2 = \frac{1}{4};$

3)



Пример 3. Независимые **с**лучайные величины X и Y заданы законом распределения:

X	-3	1	2	3
p_i	0,1	0,4	0,3	…

Y	-1	2	3	4
p_i	0,3	0,2	0,1	…

Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины $Z = 3X - 5Y^2$.

Решение. Найдем недостающие вероятности в законах распределения, зная, что сумма вероятностей возможных значений случайной величины равна 1. Таким образом, P(X=3)=0,2, а P(Y=4)=0,4.

Найдем математическое ожидание случайной величины $Z = 3X - 5Y^2$.

$M(X) = (-3) \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,2 = -0,3 + 0,4 + 0,6 + 0,6 = 1,3$

Аналогично,

$M(Y) = (-1) \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,4 = -0,3 + 0,4 + 0,3 + 1,6 = 2$

$$M(Y^2) = (-1)^2 \cdot 0,3 + 2^2 \cdot 0,2 + 3^2 \cdot 0,1 + 4^2 \cdot 0,4 =$$
$$= -0,3 + 0,8 + 0,9 + 6,4 = 7,8$$

Тогда,

$$M(Z)=M(3X-5Y^2)=M(3X)-M(5Y^2)=3M(X)-5M(Y^2)=1*1{,}3-5*7{,}8=$$
$$=1{,}3-39=-37{,}7$$

Из свойств дисперсии следует:

$$D(Z)=D(3X-5Y^2)=D(3X)+D(5Y^2)=9D(X)+25D(Y)$$

Найдем дисперсию случайных величин X и Y.

$$D(X)=M(X^2)\ -\ (M(X))^2=(-3)^2\cdot 0{,}1+1^2\cdot 0{,}4+2^2\cdot 0{,}3+3^2\cdot 0{,}2-$$
$$-((-3)\cdot 0{,}1+1\cdot 0{,}4+2\cdot 0{,}3+3\cdot 0{,}2)^2=3$$

$$D(Y)=M(Y^2)\ -\ (M(Y))^2=(-1)^2\cdot 0{,}3+2^2\cdot 0{,}2+3^2\cdot 0{,}1+4^2\cdot 0{,}4-$$
$$-((-1)\cdot 0{,}3+2\cdot 0{,}2+3\cdot 0{,}1+4\cdot 0{,}4)^2=6{,}4$$

Следовательно, $D(Z)=9\cdot 3+25\cdot 6{,}4=187$.

Тогда $\sigma(Z)=\sqrt{D(Z)}=\sqrt{187}$

Пример 4. Случайные величины x и y независимы. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины z=8x-4y, если M(x)=7; M(y)=15; D(x)=10; D(y)=20

M(z)=M(8x-4y)= 8M(x)-4M(y)=8*7-4*15=56-60=-4

D(z)=D(8x-4y)=64D (x)+16D(y)=64*10+16*20=640+320=960

$$\sigma(Z)=\sqrt{D(Z)}=\sqrt{960}$$

Пример 5. Случайная величина X задана законом распределения:

X	-3	1	2	3
p_i	0,1	0,4	0,3	0,2

Найти дисперсию случайной величины $Z=3X^2+2X+5$.

Решение. $D(Z)=M(Z^2)$ - $(M(Z))^2$

Т.к. случайные величины X и X^2 не являются независимыми, то закон распределения случайной величины Zпримет вид:

Z	$3(-3)^2+2(-3)+5=26$	10	21	38
p_i	0,1	0,4	0,3	0,2

Тогда закон распределения случайной величины Z^2примет вид:

Z	676	100	441	1444
p_i	0,1	0,4	0,3	0,2

Таким образом,

$$D(Z)=M(Z^2)\ -\ (M(Z))^2=676\cdot 0{,}1+100\cdot 0{,}4+441\cdot 0{,}3+1444\cdot 0{,}2-$$
$$-(26\cdot 0{,}1+10\cdot 0{,}4+21\cdot 0{,}3+38\cdot 0{,}2)=508{,}2$$

Пример 6. Обстреливается 5 целей. Вероятность поражения одной цели равна 0,6. Найти математическое ожидание числа пораженных целей и дисперсию.

Решение.

Пусть СВ *X*– число пораженных целей. Её возможные значения 0,1, 2, 3, 4, 5. Вычисляя вероятности возможных значений СВ по формуле Бернулли при $n = 5$, $p = 0{,}6$, $q = 0{,}4$, получим следующий ряд распределения:

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,01024	0,0768	0,2304	0,3456	0,2592	0,07776

По формуле $M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$, находим:

$$M(X) = 0 \cdot 0{,}01024 + 1 \cdot 0{,}0768 + 2 \cdot 0{,}2304 + +3 \cdot 0{,}3456 + 4 \cdot 0{,}2592 + 5 \cdot 0{,}07776 = 3.$$

Для нахождения *D(X)* составим ряд:

x_i^2	0	1	4	9	16	25
p_i	0,01024	0,0768	0,2304	0,3456	0,2592	0,07776

$$D(X) = \sum_{i=0}^{6} x_i^2 p_i - m^2 = 0 \cdot 0{,}01024 + 1 \cdot 0{,}0768 + 4 \cdot 0{,}2304 +$$

$$+9 \cdot 0{,}3459 + 16 \cdot 0{,}2592 + 25 \cdot 0{,}07776 - 3^2 = 1{,}2027.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(\tilde{O})}; \qquad \sigma(X) = 1{,}097.$$

Пример 7.Непрерывная СВ задана плотностью вероятности:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2, & при \quad 0 \le x \le 2 \\ 0 \quad , & при \quad x < 0 \quad и \quad x > 2. \end{cases}$$

Найти *M(X)* и *D(X)*.

Решение.

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \quad \text{и} \quad D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - M^2(X)$$

$$M(X) = \int_0^2 x \cdot \frac{3}{8} x^2 dx = \frac{3}{8} \int_0^2 x^3 dx = \frac{3}{8} \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^2 = \frac{3}{2};$$

$$D(X) = M(X^2) \ - \ (M(X))^2 = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{3}{8} x^2 dx - \frac{9}{4} = \frac{3}{8} \int_0^2 x^4 dx - \frac{9}{4} = \frac{3}{8} \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_0^2 - \frac{9}{4} =$$

$$= \frac{12}{5} - \frac{9}{4} = \frac{3}{20};$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{3}{20}} = 0{,}387.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения:

x_i	-2	1	2	3
p_i	0,08	0,4	0,32	0,2

Найти:

а) функцию распределения $F(x)$;

б) вероятность событий $A=\{x<2\}, B=\{1\le x<3\}, C=\{1<x\le 3\}$.

в) построить полигон и график функции $F(x)$.

г) найти M(X), D(X), σ(X).

д) Найти дисперсию случайной величины $Z=2X^2+4X-2$.

2. Студенты одной из групп экономического факультета сдают все экзамены только на хорошо и отлично. Вероятность получения отличной оценки равна 0,6, а хорошей – 0,4. В течение экзаменационной сессии студенту этой группы предстоит сдать 4 экзамена. Найти закон распределения случайной величины X– числа полученных им баллов.

3. Известно, что в определенном городе 20 % горожан предпочитают добираться на работу личным автотранспортом. Случайно выбраны 4 человека.

а) Составьте закон распределения числа людей предпочитающих добираться на работу личным автотранспортом и постройте полигон распределения.

б) Найдите функцию распределения и постройте ее график.

4. На предприятии работает 200 человек. Из них 10 получают по 1800 рублей, 40 – по 1500 рублей, 80 человек – по 1200 рублей, 50 человек – по 1000 рублей и 20 человек – по 700 рублей. Определить среднюю заработную плату работника (рассматривая зарплату, как дискретную случайную величину), ее дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

5. Дисперсия случайной величины равна 5. Найти дисперсию величин: $(X-1)$; $(-X)$; $(3X+6)$.

6. Найти математическое ожидание случайной величины $Z=X+2Y$,если $M(X)=5,\ M(Y)=3$.

7. Непрерывная СВ задана функцией распределения.

$$F(x)=\begin{cases}0, & при\ x\le 0;\\ \dfrac{x^2}{9}, & при\ 0<x\le 3;\\ 1, & при\ x>3.\end{cases}$$

Требуется: а) составить *f(x)*.

б) найти: *M(X); D(X)*; σ; $P(1<X<3)$.

а) построить графики функций *F(x)* и *f(x)*.